CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Theorie der Parallelität
Prof. Dr. K. Jansen, K. Klein

5. November 2014

Übungen zur Vorlesung »WInf III / Einf. OR«

Übungsblatt 2

Präsenzaufgabe 2.1
Gegeben sei folgende Rekurrenzgleichung für Parameter $a, b, c \in \mathbb{N}$:

$$T(1) = b$$
$$T(n) = aT(n/c) + b \cdot n$$

Zeigen Sie, dass $T(n) = O(n^{\log_c a})$ für den Fall, dass $a > c$ ist.

Präsenzaufgabe 2.2
Analysieren Sie die Laufzeit des in der Vorlesung vorgestellten dynamischen Programms zur Berechnung der kürzesten Rundreise im Travelling Salesman Problem. Zeigen Sie, dass die Laufzeit $O(n^2 \cdot 2^n)$ beträgt.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\sum_{\ell=2}^{n-1} \ell(\ell-1)\binom{n-1}{\ell} = 2(n-1)(n-2)2^{n-3}$.

Hausaufgabe 2.3 (5 Punkte)
Der bekannte Strassen-Algorithmus für Matrizen multipliziert zwei $n \times n$-Matrizen in Zeit $\mathcal{O}(n^{2,808})$. Dazu zerlegt er die Matrizen in 2×2-Blockmatrizen, sodass nur 7 statt (wie beim naiven Ansatz) 8 Multiplikationen nötig sind.

Eine Idee ist es, stattdessen in 3×3-Matrizen zu zerlegen. Ein Wissenschaftler hat vor einigen Jahren versucht, die kleinste Zahl an Multiplikationen zu bestimmen, um zwei 3×3-Matrizen zu multiplizieren. Angenommen, nur 22 Multiplikationen wären nötig: Welche asymptotische Laufzeit wäre für die Multiplikation von zwei $n \times n$-Matrizen (mit $n = 3^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$) möglich, wenn man den Strassen-Algorithmus entsprechend anpassen würde?

Hinweis: Bestimmen Sie die passende Rekursionsformel.

Hausaufgabe 2.4 (5 Punkte)
Zur Bestimmung des bestmöglichen Gewinns beim Kauf und Verkauf von Aktien über einen festen Zeitraum im Nachhinein ist es sinnvoll, die Aktien bei einem lokalen Minimum des Kurses zu Kaufen und bei einem lokalen Maximum zu verkaufen. Treten in diesem Zeitraum das globale Maximum nach dem globalen Minimum auf, so sind dies die besten Zeitpunkte für Kauf und Verkauf. Andernfalls bedarf die Bestimmung der besten Zeitpunkte weiterer Überlegung.

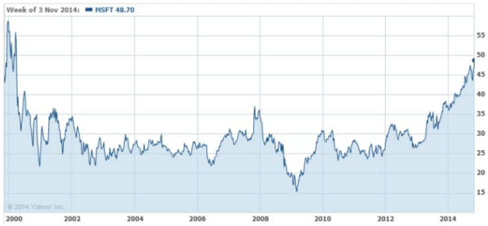

Abbildung 1: Börsenkurs von Microsoft

Liegen die Daten aber nicht in Form einer Kurve vor, sondern in Form von Änderungen des Kurses in konstanten diskreten Zeitabständen, so ist das Verfahren zur Bestimmung der besten Zeitpunkte für Kauf und Verkauf durch folgendes Problem formalisiert:
Gegeben ist eine Folge von n ganzen Zahlen in einem Array. Gesucht ist die maximale Summe aller Elemente einer zusammenhängenden Teilfolge.
Beispiel: Für die Eingabefolge

31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

187

mit $n = 10$ Zahlen ist die Summe der Teilfolge von Index 2 bis Index 6 mit Wert 187 die Lösung des Problems. Finden Sie einen Algorithmus basierend auf der Technik Divide and Conquer, der das Problem in $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten löst.
Hinweis: Überlegen Sie sich wie eine Lösung in einem Feld der Größe aussehen kann; insbesondere wenn sie das Feld in zwei Teilfelder der Größe n/2 zerlegen. Entwerfen Sie dann mittels der Divide und Conquer Methode einen entsprechenden Algorithmus.

Abgabe: Donnerstag, den 12. November, bis spätestens 10 Uhr im Schrein