

Themenvorschlag für eine Abschlussarbeit

Deterministische Algorithmen zur Diskrepanzminimierung

Eignung: Bachelor, Master

Problemstellung

GEGEBEN: Eine Grundmenge $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ und eine Familie von Teilmengen $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ mit $S_i \subseteq U$.

GESUCHT: Eine Zweifärbung $\chi: U \rightarrow \{-1, 1\}$ so dass die maximale Diskrepanz $\text{disc}(\chi) := \max_i |\chi(S_i)|$ minimiert wird. Hierbei ist $\chi(S_i) = \sum_{u \in S_i} \chi(u)$ die *Diskrepanz* der Menge S_i .

Bekannte Ergebnisse

Eine zufällige Färbung der Grundmenge zeigt die Existenz einer Färbung χ mit $\text{disc}(\chi) \leq O(\sqrt{n \ln(m)})$. Eine genauere Analyse von Spencer aus dem Jahre 1985 zeigt, dass es sogar eine Färbung χ mit $\text{disc}(\chi) \leq O(\sqrt{n \ln(m/n)})$ gibt. Für $m \leq O(n)$ ist dies also eine quantitativ bessere Abschätzung. Die Grundlage des Beweises von Spencer ist das *Partial Coloring Lemma*, welches geschickt eine *quasi-Zweifärbung* $\tilde{\chi}: U \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ produziert, bei der allerdings nur maximal 9/10 der Einträge gleich 0 sind. Eine wiederholte Anwendung des Lemmas liefert dann das gewünschte Ergebnis. Der ursprüngliche Beweis von Spencer ist nicht konstruktiv, da er das Schubfachprinzip nutzt. Im Jahr 2010 zeigte Bansal einen randomisierten effizienten Algorithmus, der das Ergebnis des Partial Coloring Lemmas reproduziert. Dieser Algorithmus wurde 2012 von Lovett und Meka deutlich vereinfacht. Es handelt sich dabei jedoch noch immer um ein randomisiertes Verfahren. Erst 2017 konnten Levy, Ramadas und Rothvoss zeigen, dass es auch ein solches deterministisches Verfahren basierend auf dem *Multiplicative Weight Update* Algorithmus gibt.

Offene Fragestellungen

Da das von Levy, Ramadas und Rothvoss entwickelte Verfahren erst seit kurzer Zeit bekannt ist, gibt es noch keine experimentelle Evaluation, inwieweit der Algorithmus für praktische Anwendungen geeignet ist. Eine mögliche praktisch orientierte Abschlussarbeit wäre daher eine gute Implementierung dieses Verfahrens. Auf der theoretischen Seite gibt es die Möglichkeit, das Verfahren für explizite Familien von Teilmengen, die aus konkreten Problemstellungen wie dem BIN PACKING entstehen, zu untersuchen. Hierbei wäre das Ziel, den Algorithmus für diese expliziten Familien zu vereinfachen, seine Laufzeit zu verbessern und eventuell eine detaillierte Gütegarantie zu geben.

Literatur

- [1] J. Spencer, *Six standard deviations suffice*, Transactions of the American Mathematical Society, 289(2):679–706, 1985.
- [2] N. Bansal, *Constructive Algorithms for Discrepancy Minimization*, Proc. FOCS 2010, 3–10, 2010.
- [3] S. Lovett und R. Meka, *Constructive Discrepancy Minimization by Walking on the Edges*, Proc. FOCS 2012, 61–67, 2012.
- [4] A. Levy und H. Ramadas und T. Rothvos, *Deterministic Discrepancy Minimization via the Multiplicative Weight Update Method*, Proc. IPCO 2017, 380–391, 2017.

Kontakt und Informationen

Sebastian Berndt und Klaus Jansen
CAP4, R. 1002

seb@informatik.uni-kiel.de und kj@informatik.uni-kiel.de