



Übungen zur Vorlesung »Effiziente Algorithmen«

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

In der Vorlesung wurde folgende LP-Relaxierung für Scheduling auf nicht-identischen Maschinen (bzw. Scheduling on Unrelated Machines) vorgestellt:

$$\begin{aligned} \sum_{i:(i,j) \in S_T} x_{ij} &= 1 & \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ \sum_{j:(i,j) \in S_T} p_{ij} x_{ij} &\leq T & \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ x_{ij} &\in [0, 1] \end{aligned}$$

wobei $S_T = \{(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \mid p_{ij} \leq T\}$. Wir bezeichnen mit dem Integrality-Gap für eine Instanz das Verhältnis des Optimums zu dem minimalen T , für das das obige LP zulässig ist. Es wurde gezeigt, dass der Integrality-Gap nie schlechter als 2 ist.

Zeigen Sie, dass für dieses LP keine bessere Analyse möglich ist. Konstruieren Sie dazu eine Klasse von Instanzen, mit denen Sie beliebig nahe an einen Integrality-Gap von 2 kommen.

Aufgabe 10.2

Cubic Vertex-Cover ist ein NP-schweres Problem. Es ist wie folgt definiert. Gegeben ist ein kubischer Graph $G = (V, E)$ (d.h. jeder Knoten hat Grad 3) und ein $k \in \mathbb{N}$. Gesucht ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ der Knoten mit $|U| \leq k$, sodass f.a. $(u, v) \in E$ gilt $u \in U$ oder $v \in U$. Zeigen Sie mit einer Reduktion auf das Vertex-Cover Problem, dass es keine Approximation mit Güte unter $4/3$ für Scheduling on Unrelated Machines gibt, außer $P = NP$.

TIPP: Wählen Sie eine Instanz mit $|V|$ Maschinen und $|V| - k$ Jobs mit Ausführungszeit 1 auf jeder Maschine. Zusätzlich nehmen Sie für jede Kante $(u, v) \in E$ einen Job der auf den u und v entsprechenden Maschinen jeweils Ausführungszeit $1/3$ hat und auf den übrigen $4/3$.