CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Theorie der Parallelität
Prof. Dr. K. Jansen, Lars Rohwedder

23. Juni 2016

Übungen zur Vorlesung »Effiziente Algorithmen«

Übungsblatt 11

Ziel der folgenden zwei Übungsblätter ist es, ein asymptotisches vollständiges Approximationsschema für eine Verallgemeinerung des Problems MIN BINPACKING zu konstruieren.

Problem: MIN BINPACKING MIT KONFLIKTEN
Eingabe: Eine Menge $V = \{1,\dots,n\}$, Zahlen $s_1,\dots,s_n \in (0,1]$ und ein Graph $G = (V,E)$.
Ausgabe: Eine Partition von V in Bins $B_1,\dots,B_l$ mit l minimal so, dass

$$\sum_{i\in B_j} s_i \leq 1 \text{ für alle } j \leq l \text{ und } \{k,k'\} \notin E \text{ für alle } k,k' \in B_j.$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass der Konfliktgraph G *d-induktiv* ist, d. h., die Knoten des Graphen können so in Reihenfolge $v_1,\cdots,v_n$ angeordnet werden, dass jeder Knoten zu höchstens d Knoten mit kleinerem Index adjazent ist, d. h., es gilt also

$$|\{v_j; j < i \text{und } \{v_j,v_i\} \in E\}| \leq d$$

für alle $v_i \in V$.

Aufgabe 11.1

Sei $I = (G = (V,E), \{s_1,\dots,s_n\})$ eine Eingabe des Problems BIN PACKING MIT KONFLIKTEN, $\varepsilon > 0$ und $V_\varepsilon := \{i; s_i \geq \varepsilon/2\}$. Wir nennen dann die Elemente aus V_ε „groß“. Wir nehmen weiter an, dass die Items aus V_ε mit dem Algorithmus von Karmarkar und Karp bereits in Bins gepackt wurden, wobei nur m verschiedene Bintypen benutzt wurden.

Geben Sie einen Algorithmus an, der aus dieser Lösung eine konfliktfreie Lösung konstruiert, wobei sich die Gesamtanzahl der Bins um höchstens $m \cdot d$ erhöht.

Aufgabe 11.2

Die durch den Algorithmus aus der obigen Übungsaufgabe ermittelte Lösung für die „großen“ Items bestehe aus β Bins. Darunter seien $\rho < \beta$ Bins, die bis zu einer Höhe $H(B_j) \leq 1-\delta$, $\delta := \varepsilon/2$, gefüllt sind. Weiter sei eine Menge I_δ von Elementen aus V mit $s_i < \delta$ für alle $i \in I_\delta$ so gegeben, dass gilt

$$\forall i \in I_\delta \text{ und } 1 \leq j \leq \rho\ \exists x \in B_j:\ \{x,i\} \in E.$$

Die Anzahl der großen Items in den ρ Bins sei mit $\text{Large}(I,\rho)$ bezeichnet. Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$|I_\delta| \cdot \frac{\rho - d}{d} \leq \text{Large}(I,\rho) \leq \rho \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine „d-induktive“ Anordnung der Knotenmenge und unterscheiden Sie zwischen großen Elementen mit kleinerem und solchen mit größerem Index als die Elemente aus I_δ.

Abgabe: Donnerstag, den 30. Juni 2016, in der Vorlesung oder vorher bei Lars Rohwedder (Hochhaus, R. 1009)