CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Algorithmen und Komplexität
Prof. Dr. K. Jansen, H. Brinkop

14. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung »Effiziente Algorithmen«

Übungsblatt 11

Ziel der folgenden zwei Übungsblätter ist es, ein asymptotisches vollständiges Approximationsschema für eine Verallgemeinerung des Problems Min Binpacking zu konstruieren.

Problem: Min Binpacking mit Konflikten
Eingabe: Eine Menge $V = [n]$, Zahlen $s_1, \ldots, s_n \in]0,1]$ und ein Graph $G = (V, E)$.
Ausgabe: Eine Partition von V in Bins $B_1, \ldots, B_l$ mit l minimal so, dass

$$\forall j \in [l].\ \sum_{i \in B_j} s_i \leq 1 \land \forall k \in B_j.\ \forall k' \in B_j.\ kk' \notin E$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass der Konfliktgraph G *d-induktiv* ist, d. h., die Knoten des Graphen können so in Reihenfolge $v_1, \cdots, v_n$ angeordnet werden, dass jeder Knoten zu höchstens d Knoten mit kleinerem Index adjazent ist, d. h., es gilt also für alle $v_i \in V$.

$$|\{v_j \ \mid j \in [i-1], v_j v_i \in E\}| \leq d$$

Aufgabe 11.1

Sei $I = (G, \{s_1, \ldots, s_n\})$ mit $G = (V, E)$ und $V = [n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Eingabe des Problems Bin Packing mit Konflikten, $\varepsilon > 0$ und $V_\varepsilon = \{i \mid s_i \geq \varepsilon/2\}$. Wir nennen dann die Elemente aus V_ε *groß*. Wir nehmen weiter an, dass die Items aus V_ε mit dem Algorithmus von Karmarkar und Karp bereits in Bins gepackt wurden, wobei nur m verschiedene Bintypen benutzt wurden (Die *kleinen* Items sollen in dieser Aufgabe *nicht* betrachtet werden).

Geben Sie einen Algorithmus an, der aus dieser Lösung eine konfliktfreie Lösung konstruiert, wobei höchstens $m \cdot d$ zusätzliche Bins benutzt werden.

Aufgabe 11.2

Die durch den Algorithmus aus der obigen Übungsaufgabe ermittelte Lösung für die *großen* Items bestehe aus β Bins. Darunter seien $\rho < \beta$ Bins, o.B.d.A. die Bins $B_1 \dots B_\rho$, die jeweils bis zu einer Höhe $\leq 1 - \delta$ mit $\delta = \varepsilon/2$ gefüllt sind.

Sei I_δ eine Menge von Elementen aus V, die die nachfolgenden Eigenschaften erfüllt

1. $\forall i \in I_\delta.\ s_i < \delta$
2. $\forall i \in I_\delta.\ \forall j \in [\rho].\ \exists x \in B_j.\ xi \in E$ oder in Worten: kein Element aus I_δ kann in einen der ersten ρ Bins gepackt werden, ohne dass es zu einem Konflikt mit einem darin bereits enthaltenen Item kommt

Bezeichne $\text{Large}(I, M)$ die Anzahl der großen Items in einer Menge M von Bins. Zeigen Sie nachfolgende Abschätzung für jedes I_δ, dass die geforderten Eigenschaften besitzt:

$$|I_\delta| \cdot \frac{\rho - d}{d} \leq \text{Large}(I, \{B_i \mid i \in [\rho]\}) \leq \rho \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Anordnung der Knotenmenge, wie sie nach Definition von *d-induktiv* möglich ist, und unterscheiden Sie zwischen großen Elementen mit kleinerem und solchen mit größerem Index als die Elemente aus I_δ.

Abgabe: 20. Januar 2020, bis spätestens 10:15 Uhr im Schrein