



Übungen zur Vorlesung »Effiziente Algorithmen«

Übungsblatt 9

Beachten Sie bitte das genau Abgabedatum. Die Übung wird an diesem Tag nicht stattfinden, ein neues Blatt wird aber wie sonst auch ausgegeben. Dieses und das folgende Blatt werden entsprechend in der darauffolgenden Woche zusammen in der Übung behandelt.

Aufgabe 9.1 (4/6 Punkte)

Das Santa Claus Problem ähnelt dem Scheduling on Unrelated Machines, unterscheidet sich aber in der Zielfunktion: Es gibt Ressourcen $R = \{R_i \mid i \in [n]\}$ und Spieler $P = \{P_i \mid i \in [m]\}$. Jede Ressource R_j hat einen Wert v_{ij} für Spieler P_i . Es soll jede Ressource genau einem Spieler zugewiesen werden. Die Spieler bekommen also paarweise disjunkte Ressourcenmengen $L_1 \uplus \dots \uplus L_m = R$.

Zu maximieren ist der niedrigsten Wert an aufsummierten Ressourcenwerten über alle Spieler, also $\min_{i \in [m]} \sum_{R_j \in L_i} v_{ij}$. Analog zum Scheduling on Unrelated Machines soll das Problem mit binärer Suche und LP-Techniken approximiert werden.

- a) Stellen Sie ein ILP zur Modellierung des Problems auf, ob es zu einem vorgegebenen T eine Lösung gibt, deren Wert mindestens T erreicht. Existiert eine solche Lösung, so soll diese auch aus der Lösung des ILPs ablesbar sein¹. Beschreiben Sie anschließend eine sinnvolle binäre Suche, mithilfe der Sie unter Benutzung Ihres ILP eine optimale Lösung finden können.

Hinweis: Beschreiben Sie auch die Idee hinter Ihrer Lösung, insbesondere, wie Sie Ihr ILP konstruieren und warum eine Lösung für Santa Claus genau dann existiert, wenn Ihr ILP eine findet.

- b) Geben Sie einen approximativen Algorithmus für das Santa Claus Problem an, der mit der von Ihnen beschriebenen binären Suche und der (fraktionalen) Lösung der LP-Relaxierung Ihres ILP arbeitet. Die damit bestimmte Lösung soll mindestens den Wert $\geq \text{OPT} - v_{\max}$ erreichen, wobei

$$v_{\max} = \max_{\substack{i \in [m] \\ j \in [n]}} v_{ij}$$

Begründen Sie, warum Ihr Algorithmus das erreicht. Die Schritte, die analog zum Algorithmus von Scheduling on Unrelated Machines verlaufen, müssen hierbei nicht ausführlich erklärt werden.

Abgabe: 7. Januar 2020, bis spätestens 10:15 Uhr im Schrein

¹Das heißt, es geht nicht nur um das *Entscheidungsproblem*, sondern um das *Suchproblem*.