CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Theorie der Parallelität

Prof. Dr. K. Jansen, K. Klein

10. Dezember 2013

Übungen zur Vorlesung »WInf III / Einf. OR«

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabe 7.1

Bestimmen Sie einen maximalen Fluss für das in Abbildung 1 gegebenen Netzwerk (Quelle s und Senke t), mit Hilfe des Algorithmus von Dinic. Nehmen Sie dabei an, dass die Mindestkapazität der Kanten 0 ist.

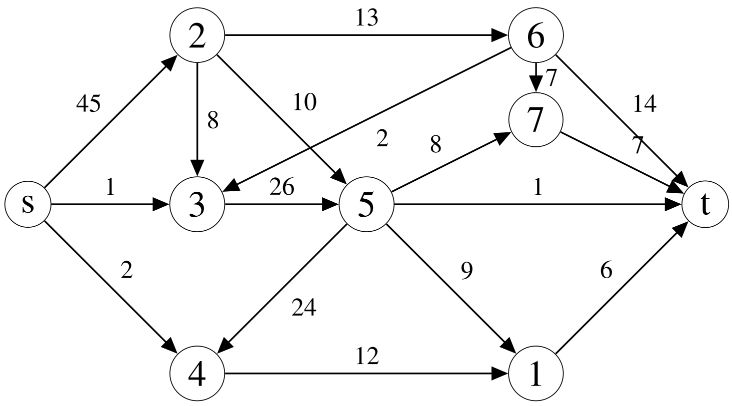

Abbildung 1: Ein Flussnetzwerk. Angegeben sind obere Kapazitäten, die unteren Kapazitäten sind 0.

Präsenzaufgabe 7.2 (Eulertour)

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter zusammenhängender Graph mit $E \subseteq V \times V$. Dabei sei $d_{\text{out}}(v)$ die Zahl der ausgehenden Kanten eines Knotens $v \in V$ und $d_{\text{in}}(v)$ die Zahl der eingehenden Kanten. Eine Eulertour ist ein Rundweg, der jede Kante genau einmal besucht (und dabei einzelne Knoten mehrmals besuchen darf).

Finden Sie im folgenden Graphen eine Eulertour.

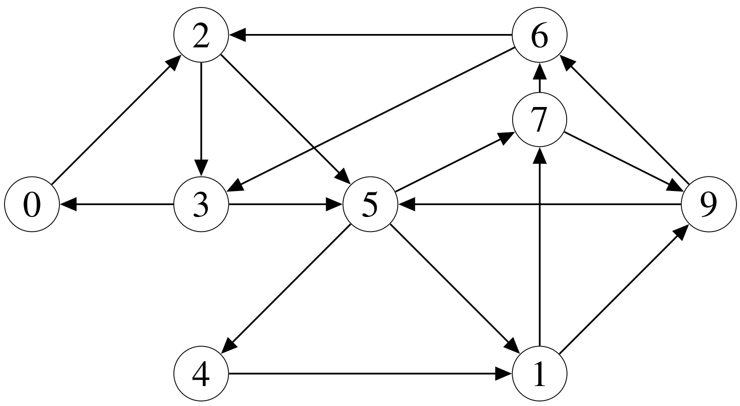

Abbildung 2: Ein Graph, bei dem jeder Knoten so viele ein- wie ausgehende Kanten hat.

Hausaufgabe 7.3 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass in zusammenhängenden Graphen in denen $d_{\text{out}}(v) = d_{\text{in}}(v)$ für alle $v \in V$ gilt, immer eine Eulertour existiert.

Geben Sie außerdem einen Algorithmus an, der eine Eulertour in solchen Graphen bestimmt.

Hausaufgabe 7.4 (5 Punkte)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Algorithmus von Dinic eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2m)$ hat, wobei $n = |V|$ und $m = |E|$. In Schritt (2) des Algorithmus wird ein Fluss $\bar{f}$ im Schichtgraphen D_f bestimmt, der auf jedem gerichteten Weg von s nach t (mindestens) eine Kante sättigt. Dafür wurde ein Unteralgorithmus vorgestellt, der $\mathcal{O}(nm)$ in einer Phase des Dinic-Algorithmus benötigt. Dinic hat damit insgesamt eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2m)$.

Verbessern Sie die Analyse des Schritts (2), um zu zeigen, dass er in einer Phase nur einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ hat. Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Dinic so eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(n^3)$ besitzt.

Hinweis: Man untersuche die Gesamtzahl T der verschiedenen Kantenbearbeitungen über alle Iterationen von Schritt (2) während einer Phase. Dazu sei $T = T_v + T_p$ die Anzahl der Bearbeitungen aller Kanten, um vollständig bzw. partiell gesättigt zu werden.

Abgabe: Mittwoch, den 17. Dezember, bis spätestens 10 Uhr im Schrein