



Übungen zur Vorlesung »Effiziente Algorithmen«

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

Betrechten Sie das Bin-Packing-Problem mit d Itemgrößen. Für eine Instanz $I = (d, a, b)$ mit $d \in \mathbb{N}$ verschiedene Itemgrößen a_1, \dots, a_d und Vielfachheiten b_1, \dots, b_d sei $\text{OPT}(I)$ der Wert einer optimalen Lösung und $\text{LIN}(I)$ der Wert einer optimalen Lösung der LP-Relaxierung

$$\begin{aligned} \min \sum_{j=1}^N \lambda_j \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j v^{(j)} &= b \\ \lambda_j &\geq 0 \end{aligned}$$

ist. Hierbei seien $v^{(1)}, \dots, v^{(N)}$ alle ganzzahligen Lösungen von $v^T a \leq 1$, sog. *pattern*. Zeigen Sie, dass $\text{OPT}(I) \leq \text{LIN}(I) + C \cdot \log^2 d$ für eine Konstante C gilt.

Hinweis:

1. Betrachten Sie eine Basislösung λ der LP-Relaxierung. Mit geeigneter Sortierung der Variablen ist $b = \sum_{j=1}^d \lambda_j v^{(j)}$. Die *residuale Instanz* ist $I' = (d, a, b')$ mit $b' = \sum_{j=1}^d (\lambda_j - \lfloor \lambda_j \rfloor) v^{(j)}$ ist. Vergleichen Sie $\text{OPT}(I) - \text{LIN}(I)$ mit $\text{OPT}(I') - \text{LIN}(I')$.
2. Sei $s(I) = a^T b$ die Gesamtgröße aller Items. Vergleichen $\text{OPT}(I') - \text{LIN}(I')$ mit $\text{OPT}(I'') - \text{LIN}(I'')$, wobei I'' durch entfernen aller Items kleiner oder gleich $\frac{1}{s(I')}$ entsteht.
3. Wenden Sie nun eine Rundungstechnik der folgenden Art per Induktion nach d an: seien die n Items in I'' mit Größen $s_1 \geq \dots \geq s_n > \frac{1}{s(I'')} \geq \frac{1}{d}$. Erhalte zunächst die Gruppe G_1 der ℓ_1 größten Items, wobei ℓ_1 so gewählt sei, dass $\sum_{i=1}^{\ell_1} s_i > 2$ und $\sum_{i=1}^{\ell_1-1} s_i \leq 2$ gilt. Bilde Gruppen G_2, \dots, G_k analog mit $|G_i| = \ell_i$, wobei $k \leq \frac{s(I'')}{2} + 1 \leq \frac{d}{2} + 1$.

Danach sei G'_i die Menge der Items aus G_i nach Löschen der $\ell_i - \ell_{i-1}$ kleinsten Items und H_i die Menge der Items, die durch Ersetzen jedes Items in G'_i durch das größte Item in G'_i entsteht. Zeige insbesondere die erweiterte Dominanzrelation $G_{i-1} \geq H_i \geq G'_i$ für $i = 2, \dots, k-1$. Bilde dann $J = \bigcup_{i=2}^k G_i$ und $J' = G_1 \cup G_k \cup \bigcup_{i=2}^k (G_i \setminus G'_i)$ und zeige $\text{OPT}(I'') - \text{LIN}(I'') \leq \text{OPT}(J) - \text{LIN}(J) + \text{OPT}(J')$ und schätze $\text{OPT}(J')$ ab.

Aufgabe 9.2

Zeige für Bin Packing, dass $\text{OPT}(I) \leq \text{LIN}(I) + C \cdot \log d \cdot \log \log d$ bzw. $\text{OPT}(I) \leq \text{LIN}(I) + C \cdot \log d$

Hinweis: Verwende Ergebnisse aus den Arbeiten von Rothvoss (<http://arxiv.org/abs/1301.4010>) bzw. Hoberg und Rothvoss (<http://arxiv.org/abs/1503.08796>). Die Arbeiten gibt es auch im OLAT.

Es reicht, wenn Sie eine der beiden Aufgaben bearbeiten, um die volle Punktzahl dieses Blattes zu erreichen. Entscheiden Sie sich z.B. für Aufgabe 9.1, dann ist Aufgabe 9.2 als Zusatzaufgabe zu verstehen.

Abgabe: Dienstag, 23. Juni 2015, bis spätestens 8 Uhr im Schrein oder per Email.