



Übungen zur Vorlesung »Effiziente Algorithmen«

Übungsblatt 6

Ziel der folgenden zwei Übungsblätter ist es, ein asymptotisches vollständiges Approximationsschema für eine Verallgemeinerung des Problems MIN BINPACKING zu konstruieren.

Problem: MIN BINPACKING MIT KONFLIKTEN

Eingabe: Eine Menge $V = \{1, \dots, n\}$, Zahlen $s_1, \dots, s_n \in (0, 1]$ und ein Graph $G = (V, E)$.

Ausgabe: Eine Partition von V in Bins B_1, \dots, B_l mit l minimal so, dass

$$\sum_{i \in B_j} s_i \leq 1 \text{ für alle } j \leq l \text{ und } \{k, k'\} \notin E \text{ für alle } k, k' \in B_j.$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass der Konfliktgraph G d -induktiv ist, d. h., die Knoten des Graphen können so in Reihenfolge v_1, \dots, v_n angeordnet werden, dass jeder Knoten zu höchstens d Knoten mit kleinerem Index adjazent ist, d. h., es gilt also

$$|\{v_j; j < i \text{ und } \{v_j, v_i\} \in E\}| \leq d$$

für alle $v_i \in V$.

Aufgabe 6.1

Sei $I = (G = (V, E), \{s_1, \dots, s_n\})$ eine Eingabe des Problems BIN PACKING MIT KONFLIKTEN, $\varepsilon > 0$ und $V_\varepsilon := \{i; s_i \geq \varepsilon/2\}$. Wir nennen dann die Elemente aus V_ε „groß“. Wir nehmen weiter an, dass die Items aus V_ε mit dem Algorithmus von Karmarkar und Karp bereits in Bins gepackt wurden, wobei nur m verschiedene Bintypen benutzt wurden.

Geben Sie einen Algorithmus an, der aus dieser Lösung eine konfliktfreie Lösung konstruiert, wobei sich die Gesamtanzahl der Bins um höchstens $m \cdot d$ erhöht.

Aufgabe 6.2

Die durch den Algorithmus aus der obigen Übungsaufgabe ermittelte Lösung für die „großen“ Items bestehe aus β Bins. Darunter seien $\rho < \beta$ Bins, die bis zu einer Höhe $H(B_j) \leq 1 - \delta$, $\delta := \varepsilon/2$, gefüllt sind. Weiter sei eine Menge I_δ von Elementen aus V mit $s_i < \delta$ für alle $i \in I_\delta$ so gegeben, dass gilt

$$\forall i \in I_\delta \text{ und } 1 \leq j \leq \rho \exists x \in B_j: \{x, i\} \in E.$$

Die Anzahl der großen Items in den ρ Bins sei mit $\text{Large}(I, \rho)$ bezeichnet. Zeigen Sie die folgende Abschätzung:

$$|I_\delta| \cdot \frac{\rho - d}{d} \leq \text{Large}(I, \rho) \leq \rho \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine „ d -induktive“ Anordnung der Knotenmenge und unterscheiden Sie zwischen großen Elementen mit kleinerem und solchen mit größerem Index als die Elemente aus I_δ .

Abgabe: Montag, 01. Juni 2015, bis spätestens 12 Uhr im Schrein.